

Akustisen aaltojohdon impedanssisovitus

Tekn. tri Jarmo Malinen

Aalto-yliopisto,
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
(Näyteluento dosentuuria varten TTY:llä)

8.5.2013

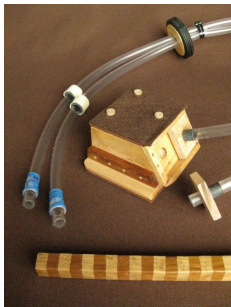
Taustaa: Puheen tallennus MRI:ssä (1)



- Puheen tutkimus ja mallinnus hyötty mahdollisuudesta tallentaa yhtäaikaista puhe- ja 3D magneettiresonanssikuvia (MRI) ihmisen ääntöväylästä.
- Metallia (erityisesti ferromagneettista) ja elektroniikkaa ei juurikaan voida käyttää MRI-koneen sisällä.

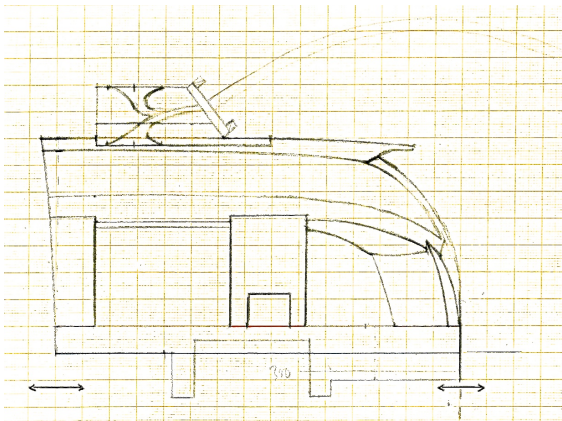
Tarvitaan siis *häiveteknologiaa*!

Taustaa: Puheen tallennus MRI:ssä (2)



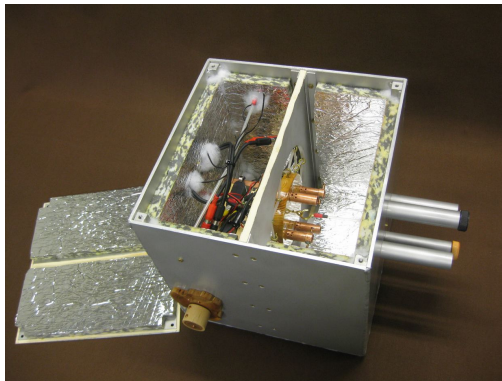
- Puhe ja melunäyte kulkevat ensimmäiset 3 m akustisesti “puutarhaletkussa”.
- Kaksikanavainen äänenkeräin ja aaltojohtimet vasemmalla. Oikealla keräin ilman vaimenninrakenteita.

Taustaa: Puheen tallennus MRI:ssä (3)



Äänenkeräin sopii tarkasti Siemens Avanto 1.5T -laitteen pää- ja kaulakäämin päälle. Keräimessä ei ole liikkuvia osia, ja siksi se ei välitä värähtelyistä.

Taustaa: Puheen tallennus MRI:ssä (4)



Aaltojohtimet vievät mikrofoniaasetelmaan, joka on asennettu äänieristetyin ja täysin ei-ferromagneettisen Faradayn häkin sisälle.

Taustaa: Puheen tallennus MRI:ssä (5)



- Äänisignaalit viedään kaapelein RF-suojattuun vahvistimeen “Epsilon”, joka sisältää analogisen melunperuutuspiirin.
- Kaikki signaalit digitoidaan M-Audio Delta 1010 -laitteella, jota ohjataan MATLABin päälle kehitetyllä signaalinkäsittely- ja kokeenjärjestelykoodilla.
- Kaikki elektroniikka on kannettavassa serveriräkissä, joka sijaitsee MRI-kontrollihuoneessa potilasmittauksien ajan.

Ongelma: aaltojohtojen pitkittäiset resonanssit

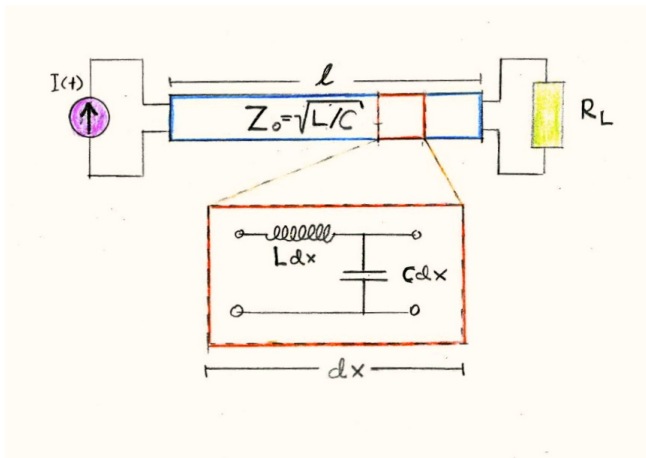
Valitettavasti:

- Puhe ei välity hyvin aaltojohtimissa, joiden pituus on useita kertoja puheen tyypillisiä aallon pituuksia.
- Aaltojohtimien seisovat aallot resonanssitaajuuksilla yliohtaavat mikrofonielementit.
- Yliohtauneet mikrofonit eivät toimi lineaarisella käyttöalueellaan. Syntyneitä artefakteja ei voida poistaa tallannetuista signaaleista, koska informaatiota on kadonnut.

Tarvitaan ratkaisu pitkittäisresonanssien sammuttamiseksi tai edes riittäväksi vaimentamiseksi.

Analogia: sähköinen siirtolinja (1)

Kuinka ongelma ratkaistaan sähköisissä siirtolinjoissa?



Vakiot L ja C ovat jakautuneita induktansseja ja kapasitansseja pituusyksikköä kohden (yksiköt H/m ja F/m).

Analogia: sähköinen siirtolinja (2)

Jännite- ja virtajakaumat $V = V(x, t)$ and $I = I(x, t)$ toteuttavat kytketyt ODY:t

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t}, \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial V}{\partial t} \end{cases}$$

missä $x \in [0, \ell]$ ja $t \geq 0$. Linjan pituus on $\ell \in (0, \infty]$.

Nämä yhtälöt antavat helposti aaltoyhtälön

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

josta päätellään, että $c := 1/\sqrt{LC}$ on aaltoliikkeen etenemisnopeus.

Analogia: sähköinen siirtolinja (3)

Mikälin sähköinen siirtolinja päätetään impedanssiin R_L (kun $x = \ell$), niin sen *impedanssiirtofunkti* $Z(s)$ (mitattu kun $x = 0$) on

$$Z(s) = Z_0 \frac{R_L + iZ_0 \tan \frac{s\ell}{c}}{Z_0 + iR_L \tan \frac{s\ell}{c}} \quad \text{kaikille } s \in \mathbb{C}_+$$

jossa $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ on siirtolinjan *ominaisimpedanssi*.

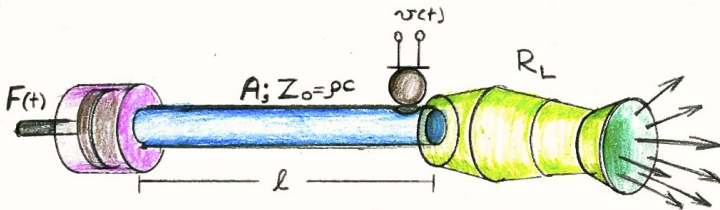
Laplace-muunnosta käyttäen saadaan

$$\hat{V}(0, s) = Z(s) \hat{I}(0, s) \quad \text{kaikille } s \in \mathbb{C}_+.$$

Optimaalinen päättäminen saadaan jos $R_L = Z_0$: tällöin $Z(s) = Z_0$ kaikille $s \in \mathbb{C}_+$. **Impedanssilla $Z(s)$ ei lainkaan najoja.** Navat olisivat merkkejä resonansseista, jotka päätepisteestä $x = \ell$ tapahtuneet heijastukset aiheuttaisivat.

Yhtälöt akustisille siirtolinjoille (1)

Aaltojohtimet ovat myös eräs siirtolinjatyyppejä.



(Radiotaajuisia aaltojohtimia käytetään mm. mikroaaltotekniikassa, mutta niiden matemaattinen analyysi on monimutkaisempaa.)

Yhtälöt akustisille siirtolinjoille (2)

Häviöttömissä akustisissa siirtolinjoissa on tapana aloittaa suoraan aaltoyhtälöstä

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

missä $x \in [0, \ell]$ ja $t \geq 0$. Äänenpaine saadaan yhtälöstä $p = \rho \phi_t$ ja perturbaationopeus yhtälöstä $v = \phi_x$, jossa yhtälön ratkaisu ϕ on nopeuspotentiaali.

Äänen nopeus c , ilmanpaine P , ja tiheys ρ kytkeytyvät kaavalla $c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$, jossa γ on adiabaattinen vakio termodynamiikasta. Ilmalla $\gamma \approx 7/5$ ja yksiatomiselle ideaalikaasulle $\gamma = 5/3$.

Ohikiitävä ekskursio systeemiajatteluun...

Sähköisen ja akustisen siirtolinjojen kentillä on yhteys

$$p(x, t) \leftrightarrow V(x, t) \quad \text{ja} \quad Av(x, t) \leftrightarrow I(x, t),$$

missä A on akustisen aaltojohdon poikkileikkauspinta-ala. Virran kaltainen suure Av on akustisen värähtelyn *tilavuusnopeus*.

Molemmilla siirtolinjoilla on sama aaltoyhtälöön perustuva malli. Mallien parametrit voidaan kääntää toisikseen kaavoilla

$$L \leftrightarrow \frac{\rho}{A} \quad \text{ja} \quad C \leftrightarrow \frac{A}{\rho c^2}.$$

Yhteys ulottuu myös siirtolinjoihin, joilla $L = L(x)$, $C = C(x)$, ja $A = A(x)$. Laajennettavissa jopa resistiivisesti (vaan ei viskoosilla tavalla) häviöllisiin siirtolinjoihin.

Yhtälöt akustisille siirtolinjoille (3)

Tarkastellaan aaltojohtimen päätä $x = 0$.

Kontrolloimalla aaltoyhtälöä $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ perturbaationopeudella $u(t) = -\phi_x(0, t)$ (virtasuure) ja havainnoimalla äänenpainetta $y(t) = \rho \phi_t(0, t)$ (jännitesuure), saadaan siirtokuvaus

$$u(\cdot) \mapsto y(\cdot),$$

joka aikamuuttujan suhteen Laplace-muunnettuna antaa *akustisen impedanssi siirtofunktion* $Z_a(s)$ ja sille yhtälön

$$\hat{y}(s) = AZ_a(s)\hat{u}(s) \quad \text{kaikilla } s \in \mathbb{C}_+.$$

“Akustinen ohmi” on SI-yksiköissä $[Z_a] = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^5}$.

Yhtälöt akustisille siirtolinjoille (4)

Osittaisdifferentiaaliyhtälömalli akustiselle siirtolinjalle on näinollen reunaehtoineen

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ -\phi_x(0, t) = u(t), \quad \rho \phi_t(\ell, t) - R_L A \phi_x(\ell, t) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

jossa mitattu ulostulosignaali on äänenpaine $y(t) = \rho \phi_t(0, t)$.

Reunaehdossa R_L on akustinen terminaatioimpedanssi (yksikkönä akustinen ohmi) kytketty pisteeseen $x = \ell$.

\$1000 kysymyksiä: Voidaanko R_L sovittaa niin, ettei resonansseja synny? Toisin sanoen, tällöin funktiolla $Z_s(s)$ ei olisi napoja? Jos voidaan, niin mikä on R_L :n haluttu arvo? Ja miltä luukulta sellainen R_L saadaan fyysisesti hankittua?

Akustisen siirtolinjayhtälön ratkaisu (1)

Haetaan yhtälön (1) resonanssit sijoittamalla siihen aikaharmoninen Ansatz $\phi(x, t) = e^{ikt}\psi(x)$ ja asetetaan $u \equiv 0$:

$$\begin{cases} \psi_{xx} + \left(\frac{k}{c}\right)^2 \psi = 0, \\ \psi_x(0) = 0, \quad ik\rho\psi(\ell) - R_L A\psi_x(\ell) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Tämän vakiokertoimisen, lineaarisen differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu toteuttaa

$$\begin{aligned} \psi(x) &= C_1 e^{i\frac{kx}{c}} + C_2 e^{-i\frac{kx}{c}} \\ \psi_x(x) &= i\frac{k}{c} \left(C_1 e^{i\frac{kx}{c}} - C_2 e^{-i\frac{kx}{c}} \right) \end{aligned}$$

jossa C_1, C_2 ovat mielivaltaisia vakioita.

Akustisen siirtolinjayhtälön ratkaisu (2)

Vakiot C_1, C_2 määräytyvät reunaehdoista pisteissä $x = 0$ ja ℓ antaen homogeenisen yhtälöryhmän

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \left(\frac{\rho c}{R_L A} - 1\right) e^{i \frac{k \ell}{c}} & \left(\frac{\rho c}{R_L A} - 1\right) e^{-i \frac{k \ell}{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

jonka yksikäsitteinen ratkeavuus riippuu siitä, häviääkö yhtälöryhmän determinantti

$$D(k) = \left(\frac{\rho c}{R_L A} - 1 \right) \cdot 2 \cos \frac{k \ell}{c}.$$

Jos $R_L \neq \frac{\rho c}{A}$, niin yhtälöryhmällä (3) on epätriviaali ratkaisu (ja täten aaltojohtimen yhtälöllä (2) ei-toivottu resonanssi) jos ja vain jos $\frac{k \ell}{c}$ on π :n pariton moninkerta.

Akustisen siirtolinjayhtälön ratkaisu (3)

Niinpä resonanssiton terminaatio täytyy olla $R_L = \frac{\rho c}{A}$ (jos sitä ylipäättään on olemassa).

Tarkemmin tarkastelemalla, nyt ainoa mahdollinen ominaisfunktio kandidaatti $\phi(x) = C \cos \frac{kx}{c}$ toteuttaa yhtälöryhmän (2) kaksi ensimmäistä yhtälöä millä tahansa vakioiden $C, k \in \mathbb{C}$ arvoilla.

Kolmas nk. *absorboiva reunaehto* kaavassa (2) antaa

$$ik\phi(\ell) = c\phi_x(\ell) \Leftrightarrow i \cos \frac{k\ell}{c} + \sin \frac{k\ell}{c} = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{k\ell}{c}} = 0.$$

Mutta $e^z \neq 0$ **kaikille** $z \in \mathbb{C}$! Niinpä yhtälön (2) resonanssiin liittyvää aaltolukua k ei voi olla olemassa, mikäli $R_L = \frac{\rho c}{A}$.

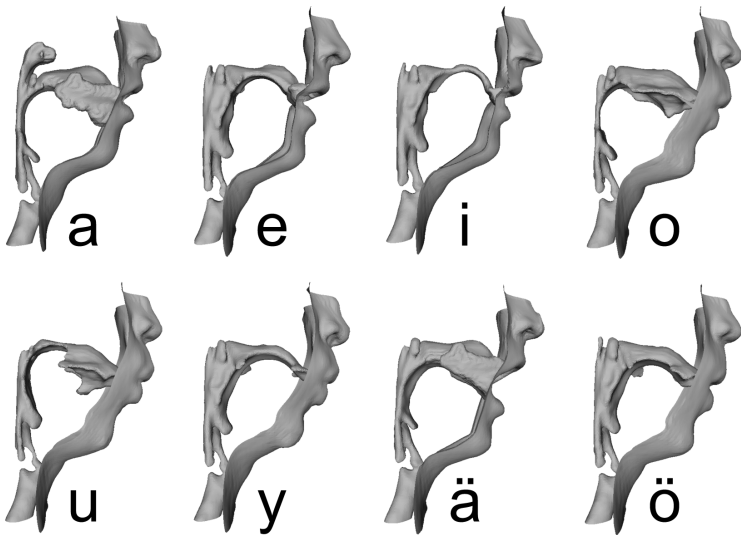
Akustisen siirtolinjayhtälön ratkaisu (4)

Materiaaliparametriä $Z_0 = \rho c = \sqrt{\gamma P \rho}$ kutsutaan väliaineen *akustiseksi ominaisimpedanssiksi*.

Sijoittamalla kaavaan $R_L = \frac{\rho c}{A}$ arvot $\rho = 1.20 \text{ kg/m}^3$, $c = 343 \text{ m/s}$, ja $A = \pi R^2$ jossa $R = 0.005 \text{ m}$ saadaan täysin absorboivaksi akustiseksi impedanssiksi mittausjärjestelmämme mikrofonilevyllä lukuarvo

$$R_L = \frac{1.20 \cdot 343}{\pi \cdot (0.005)^2} \frac{\text{Ns}}{\text{m}^5} = 5.24 \text{ M}\Omega (\text{akustista})$$

Seuraavalla luennolla tarkastelemme erityisen polttavaa kysymystä siitä, missä tällaisia akustisia resistansseja on edullisimmin saatavilla.



That's all, folks.

Seuraava lisämateriaali ei ole osa
näyteluentoa, vaan se on tarkoitettu
mahdollisia yleisökysymyksiä varten.

Where to get a pure acoustic resistance of a given value?

Ohmic resistances $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ for termination of electrical transmission lines are cheap and easy to get!

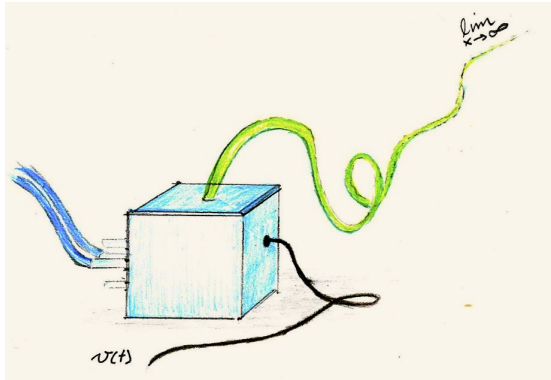


You guessed it right...

...life would be easier if there were something like

Yleisakustiikka.

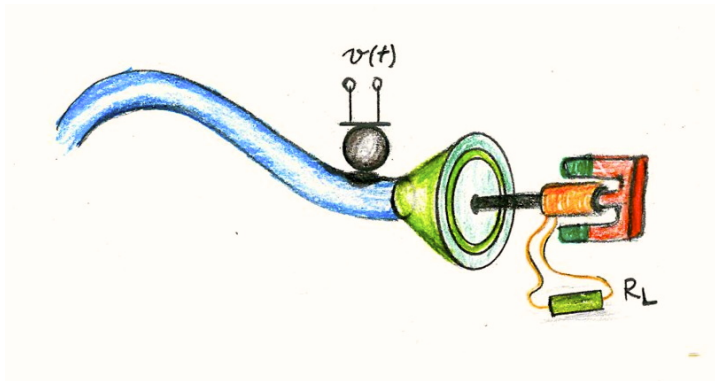
Perhaps a long-tailed solution?



Problems:

- You can get away with 3m of garden hose without getting seriously committed, but not with 30m's or 300m's...
- ... and you would need it for both channels.

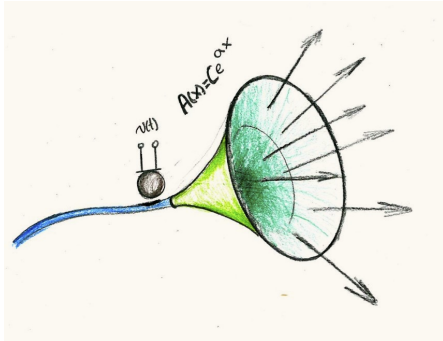
Maybe reduce it to electrodynamics by a solenoid?



Problems:

- The mass in moving parts appears as an unwanted inductance in the acoustic load R_L that should be purely resistive.
- Requires construction of small mechanical components.

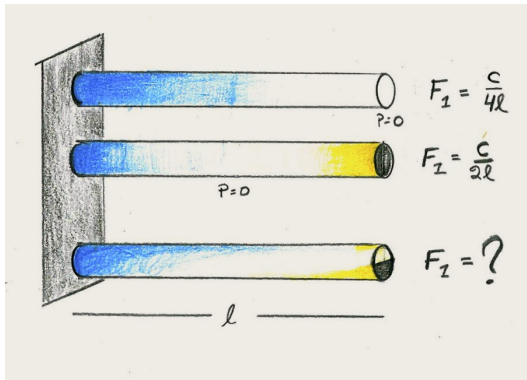
Radiate it away by something like gramophone horns?



Problems:

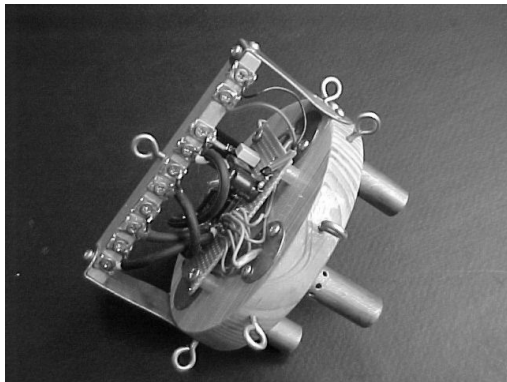
- The horns lead very effectively noise into microphones from outside.
- Impractically large and difficult to produce. The design would look like as if it were designed by Alvar Gullichsen.

How we solved the problem? (1)



So, we could try suitable holes near microphones and attenuating padding at the sound collector.

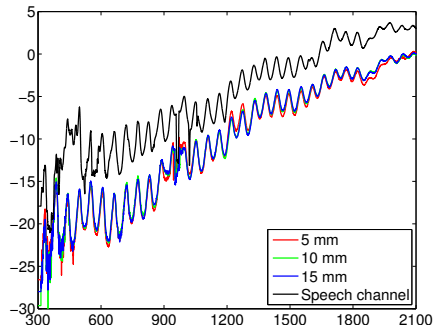
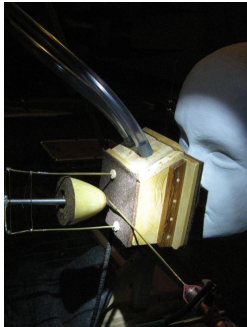
How we solved the problem? (2)



Problems:

- Far from the optimal termination, though good enough.
- Detectable crosstalk to adjacent microphone channels through holes.

How we solved the problem? (3)



The modest residual longitudinal resonances are measured by physical models and compensated numerically (MATLAB) in the audio signal post-processing stage.

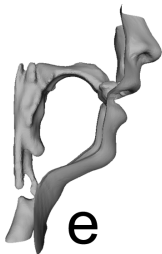
More importantly, at no extra cost.

Looking back at the design work

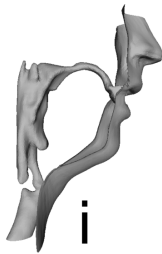
- In what way did the understanding of **physics and acoustic** help in solving the design problem?
- In what way did the understanding of **modelling and mathematics** help in solving the design problem?
- How about the role of **common sense**, open mind, and practical thinking?
- Or is it that we only arrived at this problem because we had background and interest in these areas?



a



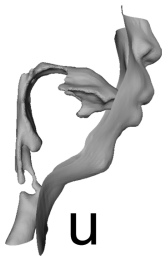
e



i



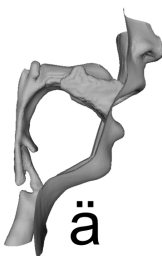
o



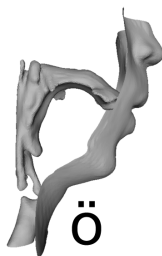
u



y



ä



ö

That's all, folks. Questions?